

Concours section : AGRÉGATION EXTERNE INFORMATIQUE

Epreuve matière : Fondements de l'informatique

N° Anonymat : N240NAT1030219

Nombre de pages : 28

17.42 / 20

Examen professionnel pour l'avancement au grade de :

Cadre réservé aux candidats d'examens et du concours général

Examen : Série / Spécialité :

Epreuve - Matière : 103-9925 Session : 2024

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuillet officiel, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Remplir soigneusement le cadre relatif au concours OU à l'examen qui vous concerne.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuillet officiel.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) sur le nombre total de pages que comporte la copie (y compris les pages vierges).
- Placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre de numérotation des pages.

Partie I - Théorie de complétude

I.1 Restriction de l'ensemble des formules

Question 1 Voici une dérivation du séquent $\vdash (\neg\neg A \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow \neg\neg A)$

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{\neg\neg A, \neg A \vdash \neg\neg A}{\neg\neg A, \neg A \vdash \neg A} \alpha_x}{\neg\neg A, \neg A \vdash \perp} \neg E \quad \frac{\frac{\frac{A, \neg A \vdash \neg A}{A, \neg A \vdash \perp} \alpha_x}{A, \neg A \vdash \perp} \neg E}{\frac{\frac{\frac{\neg\neg A, \neg A \vdash \perp}{\neg\neg A \vdash A} RAA}{\neg\neg A \vdash A} \rightarrow i \quad \frac{\frac{\frac{A, \neg A \vdash \perp}{A \vdash \neg\neg A} \neg i}{A \vdash \neg\neg A} \rightarrow i}{\vdash \neg\neg A \rightarrow A \quad \vdash A \rightarrow \neg\neg A} \wedge i \\ \vdash (\neg\neg A \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow \neg\neg A) \end{array}$$

Question 2

Par souci de clarté, on réécrit la dérivation de $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ à celles de $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ et $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Commençons par celle de $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\neg(A \vee B), A \vdash A}{\neg(A \vee B), A \vdash \neg(A \vee B)} \text{ax} \quad \frac{\neg(A \vee B), A \vdash A \vee B}{\neg(A \vee B), A \vdash \neg(A \vee B)} \text{vi} \quad \frac{\neg(A \vee B), B \vdash B}{\neg(A \vee B), B \vdash \neg(A \vee B)} \text{ax} \quad \frac{\neg(A \vee B), B \vdash A \vee B}{\neg(A \vee B), B \vdash \neg(A \vee B)} \text{vi}}{\frac{\neg(A \vee B), A \vdash \perp}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A} \neg i \quad \frac{\neg(A \vee B), B \vdash \perp}{\neg(A \vee B) \vdash \neg B} \neg i} \\
 \frac{\neg(A \vee B) \vdash (\neg A \wedge \neg B)}{\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)} \rightarrow i
 \end{array}$$

On passe maintenant à celle de $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$
 Pour simplifier l'arbre, on désigne par Γ les formules $\neg A \wedge \neg B, A \vee B$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\Gamma, A \vdash \neg A \wedge \neg B}{\Gamma, A \vdash \neg A} \text{ax} \quad \frac{\Gamma, B \vdash \neg A \wedge \neg B}{\Gamma, B \vdash \neg B} \text{ax}}{\frac{\Gamma, A \vdash \neg A \quad \Gamma, B \vdash \neg B}{\Gamma, A \vee B \vdash \neg A \wedge \neg B} \wedge e} \quad \frac{\Gamma, B \vdash \neg B}{\Gamma, B \vdash \neg(A \vee B)} \neg e} \\
 \frac{\frac{\Gamma, A \vee B \vdash A \vee B}{\Gamma, A \vee B \vdash \neg(A \vee B)} \neg i \quad \frac{\Gamma, A \vee B \vdash \neg(A \vee B)}{\Gamma, A \vee B \vdash \perp} \vee e} \\
 \frac{\Gamma, A \vee B \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg(A \vee B)} \neg i \\
 \vdash (\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B) \rightarrow i
 \end{array}$$

Question 3

On se propose de donner une dérivation du réquivalent

$$\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B) \text{ et donc des deux réquivalents } \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vee B \text{ et } \vdash \neg A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Pi_1}{\Gamma \vdash \neg(\neg A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)} \quad \frac{\Gamma \vdash \neg(\neg A \vee B)}{\Gamma \vdash \neg A \wedge \neg B} \text{ax} \\
 \frac{\Pi_2}{\Gamma \vdash \neg A \rightarrow A} \quad \frac{\Gamma \vdash \neg A \wedge \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \wedge_e \quad \frac{\Gamma \vdash \neg(\neg A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)}{\Gamma \vdash \neg(\neg A \vee B)} \text{ax} \\
 \frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash A} \text{ax} \quad \frac{\Gamma \vdash \neg A \wedge \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \wedge_e \quad \frac{\Gamma \vdash \neg(\neg A \vee B)}{\Gamma \vdash \neg A \vee B} \neg_e \\
 \frac{A \rightarrow B, \neg(\neg A \vee B) \vdash B}{A \rightarrow B, \neg(\neg A \vee B) \vdash \perp} \neg_e \quad \frac{A \rightarrow B, \neg(\neg A \vee B) \vdash \perp}{A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B} \neg_e \\
 \frac{A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B}{\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)} \rightarrow_i
 \end{array}$$

Il faut alors insérer Π_1 , l'arbre de preuve fait en Q2 et Π_2 en Q1

$$\frac{\frac{\Gamma, \neg A, \neg B \vdash \neg A}{\Gamma, \neg A, \neg B \vdash \perp} \neg_e}{\Gamma, \neg A, \neg B \vdash \perp} \neg_e \quad \frac{\Gamma, \neg A, \neg B \vdash \perp}{\Gamma, \neg A \vdash B} \text{RAA}$$

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash \neg A \vee B}{\Gamma, \neg A \vdash B} \vee_e \quad \frac{\Gamma, B \vdash B}{\Gamma, B \vdash \perp} \text{ax}}{\Gamma, \neg A \vdash B} \neg_e \quad \frac{\Gamma, \neg A \vdash B}{\vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)} \rightarrow_i$$

Question 4

Supposons que $\vdash A \leftrightarrow B$ est dérivable.

Montrons que si $\vdash A$ est dérivable, alors $\vdash B$ l'est aussi.

Comme $\vdash A$ est dérivable, il existe un arbre de preuve Π tel que

$$\frac{\Pi}{\vdash A}.$$

Comme $\vdash A \leftrightarrow B$ est dérivable, il existe un arbre de preuve Π' tel que

$$\frac{\Pi'}{\vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)}$$

On donne alors la dérivation de $\vdash B$ suivante :

$$\frac{\frac{\Pi}{\vdash A} \quad \frac{\frac{\Pi'}{\vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)}}{\vdash A \rightarrow B} \wedge e, g}{\vdash B} \rightarrow e$$

Donc $\vdash B$ est dérivable.

L'autre sens de la preuve est la même chose en remplaçant $\wedge e, g$ par $\wedge e, d$ et en échangeant A et B .

Finalement $\vdash A$ est dérivable si et seulement si $\vdash B$ est dérivable.

Examen professionnel pour l'avancement au grade de :

Cadre réservé aux candidats d'examens et du concours général

Examen : Série / Spécialité :

Epreuve - Matière : 103 - 9925 Session : 2024

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuillet officiel, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Remplir soigneusement le cadre relatif au concours OU à l'examen qui vous concerne.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuillet officiel.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) sur le nombre total de pages que comporte la copie (y compris les pages vierges).
- Placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre de numérotation des pages.

Question 5

Montrons par induction sur l'ordre de preuve de $\Gamma \vdash A$ que si $\Gamma \vdash A$ est dérivable alors pour tout ensemble Δ de formules, $\Gamma, \Delta \vdash A$ est dérivable.

① Si la dernière règle utilisée est ax alors on a $\frac{\Gamma \vdash A}{\text{ax}}$ et donc $A \in \Gamma$
 Or comme $A \in \Gamma$, on a $A \in \Gamma, \Delta$, donc $\frac{\Gamma, \Delta \vdash A}{\text{ax}}$

② Si la dernière règle utilisée est RAA , alors on a $\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{RAA}$ avec $\Gamma, \neg A \vdash \perp$ qui est dérivable. par hypothèse d'induction, $\Gamma, \neg A, \Delta$ est dérivable. Ainsi $\frac{\Gamma, \Delta, \neg A \vdash \perp}{\Gamma, \Delta \vdash A} \text{RAA}$ et donc $\Gamma, \Delta \vdash A$ est dérivable.

Tous les autres cas se traitent de la même manière que ②

On en déduit la propriété voulue.

Question 6

Supposons vérifié le théorème de complétude pour les formules de F_1 .

Soit $A \in F_0$ une formule. Supposons alors que $\neg A$ et montrons que $\vdash A$ est dérivable.

On sait (d'après l'énoncé) qu'il existe $[A]_1 \in F_1$ tel que $\vdash A \leftrightarrow [A]$, sont dérivables et $A \equiv [A]_1$.

Comme $A \equiv [A]$, et $\vdash A$, on a $\vdash [A]_1$ (par définition de \equiv et \vdash)

Comme $\vdash A \leftrightarrow [A]_1$ et $\vdash [A]$ sont dérivables

D'après le théorème de complétude sur F_1 , on a que $\vdash [A]$ est dérivable

Comme $\vdash [A]$, et $\vdash A \leftrightarrow [A]$, sont dérivables, d'après la question 4, $\vdash A$ est dérivable.

Ce qui conclut la démonstration.

Question 7

On considère une valuation partielle v vérifiant $\llbracket p_0 \rrbracket_v = F$ et $\llbracket p_2 \rrbracket_v = F$ (la valuation de p_1 importe peu ici) de rang 2

On a alors $\llbracket p_0 \rightarrow p_2 \rrbracket_v = V$, puis $\llbracket p_0 \rightarrow (p_0 \rightarrow p_2) \rrbracket_v = V$

Ainsi $\llbracket (p_0 \rightarrow (p_0 \rightarrow p_2)) \rightarrow p_2 \rrbracket_v = F$

Donc A n'est pas une tautologie

Question 8

v_0 , la valuation initiale vérifiant $\llbracket p_0 \rrbracket_{v_0} = F$, $\llbracket p_1 \rrbracket_{v_0} = F$, $\llbracket p_2 \rrbracket_{v_0} = F$ de rang 1 est compatible avec A et réfute A .

Elle est bien de rang minimal, car une valuation de rang ≤ 1 serait incompatible avec A .

Question 8

Montrons ce résultat par récurrence sur la formule A .

- Si $A = \perp$ alors A n'est pas une tautologie et toutes les valuations initiales (elles sont toutes compatibles avec A) vérifient $\llbracket A \rrbracket_v = F$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe une valuation de rang ~~supérieur~~ à n telle que $\llbracket A \rrbracket_v = F$.

- Si $A = p_i \in P$ alors A n'est pas une tautologie.

~~A l'autre côté, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la valuation initiale de rang $\max(i, n)$~~

~~D'un autre côté, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n < i$ alors les valuations initiales de rang n ne sont pas compatibles avec A .~~

~~Si $n \geq i$, alors la valuation v de rang n telle que $\llbracket p_i \rrbracket_v = F$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ réfute A .~~

- Si $A = \neg B$,

Par hypothèse d'induction, B est une tautologie si et seulement si ~~pour tout~~ il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que pour toute valuation initiale de rang n compatible avec B (i.e avec A) alors $\llbracket B \rrbracket_v = V$

-- Si A est une tautologie, toutes les valuations, initiales ou non, réfutent B . (hypothèse d'induction). Donc toutes les valuations initiales compatibles avec B (i.e avec A) vérifient $\llbracket A \rrbracket_v = V$

-- Si A

Question 9

Cela revient à montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq i$, pour toutes formules $A_0 \dots A_n \in F$, $\bigwedge_{j=0}^n A_j \vdash A_i$ est dérivable.

Soit $i \in \mathbb{N}$, on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{I}i, +\infty\mathbb{I}$

- Si $n = i = 0$
alors $\bigwedge_{j=0}^0 A_j = A_0 = A_i$ et $A_0 \vdash A_0$ est dérivable
- Si $n = i > 0$
alors $\bigwedge_{j=0}^n A_j = \left(\bigwedge_{j=0}^{n-1} A_j \right) \wedge A_n$ et $\left(\bigwedge_{j=0}^{n-1} A_j \right) \wedge A_n \vdash A_i$ est dérivable
(par \wedge_e, d et ax)
- Si $n > i$, alors on a $\bigwedge_{j=0}^n A_j = \left(\bigwedge_{j=0}^{n-1} A_j \right) \wedge A_n$
par hypothèse d'induction, $\bigwedge_{j=0}^{n-1} A_j \vdash A_i$ est dérivable

On considère la dérivation

$$\frac{\left(\bigwedge_{j=0}^{n-1} A_j \right) \wedge A_n \vdash}{\left(\bigwedge_{j=0}^{n-1} A_j \right) \wedge A_n \vdash A_i} \wedge_e, d$$

...

$$\frac{\frac{\frac{\bigwedge_{j=0}^{n-1} A_j \vdash A_i}{\bigwedge_{j=0}^{n-1} A_j \wedge A_n \vdash \bigwedge_{j=0}^{n-1} A_j \rightarrow A_i} \rightarrow_i \quad \frac{\bigwedge_{j=0}^{n-1} A_j \wedge A_n \vdash \left(\bigwedge_{j=0}^{n-1} A_j \right)}{\left(\bigwedge_{j=0}^{n-1} A_j \right) \wedge A_n \vdash A_i} \rightarrow_e}{\left(\bigwedge_{j=0}^{n-1} A_j \right) \wedge A_n \vdash A_i} ax$$

Examen professionnel pour l'avancement au grade de :

Cadre réservé aux candidats d'examens et du concours général

Examen : Série / Spécialité :

Epreuve - Matière : 103 - 9425 Session : 2024

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuillet officiel, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Remplir soigneusement le cadre relatif au concours OU à l'examen qui vous concerne.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuillet officiel.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) sur le nombre total de pages que comporte la copie (y compris les pages vierges).
- Placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre de numérotation des pages.

Notons que $\Gamma, \bigwedge_{j=0}^{\infty} A_j \vdash A$ est dérivable d'après la question 5.

En outre, $\forall n \in \mathbb{N}, \bigwedge_{j=0}^n A_j \vdash A$ est dérivable.

Question 10

On montre par induction sur la formule A que pour toute valuation v on a v compatible avec A .

- Si $\llbracket A \rrbracket_v = V$, alors $h_v \vdash A$ est dérivable.
- Si $\llbracket A \rrbracket_v = F$, alors $h_v \vdash \neg A$ est dérivable.

① Si $A = \perp$ alors $\llbracket A \rrbracket_v = F$ peu importe v . Il est évident que $\vdash \neg \perp$ est dérivable :

$$\frac{\frac{}{\perp \vdash \perp} \text{ax}}{\vdash \neg \perp} \neg i$$

et par le théorème d'affaiblissement, $h_v \vdash \neg \perp$ est dérivable.

② Si $A = p_i$, avec $i \in \mathbb{N}$, alors on considère v une valuation compatible avec A .

Si $\llbracket A \rrbracket_v = V$ alors $\llbracket p_i \rrbracket_v = V$ et donc $\ell(v, i) = p_i = A$

Donc A apparaît dans h_v

et on peut conclure grâce à la question précédente que $h_v \vdash A$ est dérivable.

Si $\llbracket A \rrbracket_v = F$, alors $\ell(v, i) = \neg A$, donc $\neg A$ apparaît dans h_v et la question précédente permet de conclure à nouveau.

③ Si $A = \neg B$

Soit v une valuation compatible avec A (i.e avec B)

Si $\llbracket A \rrbracket_v = V$ alors $\llbracket B \rrbracket_v = F$, donc par hypothèse d'induction, $h_v \vdash \neg B$ est dérivable. comme $A = \neg B$, $h_v \vdash A$ est dérivable

Si $\llbracket A \rrbracket_v = F$ alors $\llbracket B \rrbracket_v = V$, donc $h_v \vdash B$ est dérivable.

on veut montrer que $h_v \vdash \neg \neg B$ est dérivable.

il suffit d'appliquer le résultat de la question 1 ainsi que la question 1 (i.e que $B \rightarrow \neg \neg B$) pour conclure.

④ Si $A = B \wedge C$

Si $\llbracket A \rrbracket_v = V$ alors $\llbracket B \rrbracket_v = V$ et $\llbracket C \rrbracket_v = V$.

Donc par hypothèse d'induction, $h_v \vdash B$ et $h_v \vdash C$ sont dérivables.

et donc $h_v \vdash A$ est dérivable:
$$\frac{h_v \vdash B \quad h_v \vdash C}{h_v \vdash B \wedge C} \wedge i$$

Si $\llbracket A \rrbracket_v = F$ alors $\llbracket B \rrbracket_v = F$ ou $\llbracket C \rrbracket_v = F$. supposons sans perte de généralité que $\llbracket B \rrbracket_v = F$

On a que $h_v \vdash \neg B$ est dérivable

On en déduit que $h_v \vdash \neg B \vee \neg C$ est dérivable.

puis grâce aux questions 2 et 4 (lois de De Morgan) que $h_v \vdash \neg(B \wedge C)$ est dérivable, or $\neg(B \wedge C) = \neg A$.

et donc $h_0 \vdash \neg A$ est dérivable.

Ceci conclut la preuve.

Question 11

Montrons que si $P_0 \vdash A$ et $\neg P_0 \vdash A$ sont dérivables, alors $\vdash A$ est dérivable.

On commence par montrer que $\vdash P_0 \vee \neg P_0$ est dérivable

$$\frac{\frac{\neg(P_0 \vee \neg P_0) \vdash \neg \neg P_0 \quad \neg(P_0 \vee \neg P_0) \vdash \neg P_0}{\neg(P_0 \vee \neg P_0) \vdash \perp} \neg E}{\vdash P_0 \vee \neg P_0} \text{RAA}$$

les deux séquences restant se montrent facilement avec les lois de De Morgan (2.a)

On a alors

$$\frac{\vdash P_0 \vee \neg P_0 \quad P_0 \vdash A \quad \neg P_0 \vdash A}{\vdash A} \vee E$$

Or les 3 séquences restant sont dérivables. Donc $\vdash A$ est dérivable.

Question 12

Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que P_n soit vraie.

On considère alors une valuation v de rang $n+1$, et on suppose que Soit AEF, on suppose que pour tout v de rang $n+1$, $h_v \vdash A$ est dérivable.

On en déduit que pour toute valuation v de rang n , $h_v, \bigwedge P_{n+1} \vdash A$ et $h_v, \bigwedge \neg P_{n+1} \vdash A$

sont dérivables.

On a donc

$$\frac{\frac{\frac{h_{v'}, \neg P_{n+1}, \vdash h_{v'}}{h_{v'}, \neg P_{n+1}, \vdash h_{v'} \wedge P_{n+1}} \wedge i \quad \frac{P, h_{v'} \wedge P_{n+1}, \vdash A}{h_{v'}, \neg P_{n+1}, \vdash (h_{v'} \wedge P_{n+1}) \rightarrow A} \rightarrow e}{h_{v'}, \neg P_{n+1}, \vdash h_{v'} \wedge P_{n+1} \rightarrow A} \rightarrow i$$

Enfinement $h_0: \mathbf{tA}$ est dérivable. et finalement, par hypothèse d'induction de récurrence, on en déduit que \mathbf{tA} est dérivable. et donc P_{n+1}

Question 13

Soit $A \in F$, telle que FA .

A est une tautologie, donc il existe $m \in \mathcal{M}$ tel que toutes les valuations v de rang n sont compatibles avec A et vérifient $\llbracket A \rrbracket_v = V$

Toutes ces relations initiales vérifient $\text{CAD}_v = V$, donc d'après Q10, $h_v \vdash A$ est dérivable.

Puis, comme P_i est vraie pour tout $i \in \mathbb{N}$, on obtient que P_n est vraie.

Ainsi $\vdash A$ est dérivable.

Ce qui conduit la preuve du théorème de complétude pour F_1 .

Concours section : AGRÉGATION EXTERNE INFORMATIQUE

Epreuve matière : Fondements de l'informatique

N° Anonymat : N240NAT1030219

Nombre de pages : 28

17.42 / 20

Examen professionnel pour l'avancement au grade de :

Cadre réservé aux candidats d'examens et du concours général

Examen : Série / Spécialité :

Epreuve - Matière : 103 - 9425 Session : 2024

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuillet officiel, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Remplir soigneusement le cadre relatif au concours OU à l'examen qui vous concerne.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuillet officiel.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) sur le nombre total de pages que comporte la copie (y compris les pages vierges).
- Placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre de numérotation des pages.

Partie II Mécanismes de la recherche de la preuve

Question 14

① $\rightarrow e$ n'est pas inversible $\frac{t \perp \rightarrow B}{t \perp B} \rightarrow e$ si on choisit B une tautologie,
alors $t \perp B$ est valide, pourtant $t \perp$ ne l'est pas.

② $V_{i,g}$ n'est pas inversible $\frac{t \perp}{t \perp V B} V_{i,g}$ avec B une tautologie.

③ pareil pour $V_{i,d}$

④ V_e n'est pas inversible $\frac{t \perp V \perp \perp t C}{t C} V_e$ avec C une tautologie ($t \perp V \perp$ n'est pas valide) $t C$

⑤ $\# \Lambda_{e,g}$ non plus $\frac{t \perp A \perp \perp}{t \perp A}$ avec A une tautologie. $t \perp A \perp$ n'est pas valide.

⑥ pareil pour $\Lambda_{e,d}$

13 / 28

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Question 15

l'arbre suivant comment

$$\frac{\frac{\frac{}{A \vdash A} \text{ax}}{\vdash A, \neg A} \neg d}{\vdash A \vee \neg A} \vee d$$

Question 16

On commence par $\vdash \neg \neg A \rightarrow A$

$$\frac{\frac{\frac{}{A \vdash A} \text{ax}}{\vdash A, \neg A} \neg d}{\neg \neg A \vdash A} \neg g}{\vdash \neg \neg A \rightarrow A} \rightarrow d$$

Puis $\vdash A \rightarrow \neg \neg A$

$$\frac{\frac{\frac{}{A \vdash A} \text{ax}}{A, \neg A \vdash \perp} \neg g}{A \vdash \neg \neg A} \neg d}{\vdash A \rightarrow \neg \neg A} \rightarrow d$$

Puis $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$

Puis finalement $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$

$$\frac{\frac{\frac{}{A \vdash A, B} \text{ax}}{\vdash \neg A, A, B} \neg d}{\vdash \neg A \wedge \neg B, A, B} \wedge d}{\vdash \neg A \wedge \neg B, A \vee B} \vee d}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B} \neg g}{\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B} \rightarrow d$$

$$\frac{\frac{\frac{}{\neg B, A \vdash A} \text{ax}}{\neg A, \neg B, A \vdash \perp} \neg g}{\neg A, \neg B, A \vee B \vdash \perp} \vee g}{\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)} \neg d}{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)} \wedge g}{\vdash \neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)} \rightarrow d$$

Question 17

- Les règles ax et Ig sont valides car elles n'ont pas de prémisses.
- Pour la règle $\neg g$:

Si $\Gamma, \neg A \vdash \Delta$ alors toute valuation v telle que $\llbracket \Gamma \rrbracket_v$ vérifie: si $\forall B \in \Gamma, \llbracket B \rrbracket_v = V$ et $\llbracket \neg A \rrbracket_v = V$ alors $\forall B \in \Delta, \llbracket B \rrbracket_v = V$

On considère alors $\Gamma \vdash A, \Delta$, soit v une valuation telle que $\forall B \in \Gamma, \llbracket B \rrbracket_v = V$, alors soit $\llbracket A \rrbracket_v = V$, auquel cas on a bien $\Gamma \vdash_v A, \Delta$. Soit $\llbracket A \rrbracket_v = F$, auquel cas $\llbracket \neg A \rrbracket_v = V$ et donc d'après ce qui précède, $\forall B \in \Delta, \llbracket B \rrbracket_v = V$ et donc $\Gamma \vdash_v A, \Delta$

On en déduit que $\nexists \Gamma \vdash A, \Delta$, et donc $\neg g$ est invalable.

Les 3 autres règles se traitent de manière similaire.

Question 18

```
let est-atomique (f: 'a formule): bool =  
  match f with  
  | Faux | Var _ → true  
  | _ → false.
```

Question 19

```
let rec est-valide (der: 'a derivation) (seq: 'a sequent); bool =  
  match der with  
  | AxIome f → (List.mem f seq.hyp) && (List.mem f seq.concl)  
  | Faux-g → List.mem Faux seq.hyp  
  | Non-g f der-prev → match f with  
    | Non h → try  
      let seq-prev = {hyp = extrait f seq.hyp; concl = h :: seq.concl} in  
      est-valide der-prev seq-prev  
      with Not_found → false  
    | _ → false  
  | Non-d f der-prev → match f with  
    | Non h → try  
      let seq-prev = {hyp = h :: seq.hyp; concl = extrait f seq.concl} in  
      est-valide der-prev seq-prev  
      with Not_found → false  
    | _ → false  
  | Er-g f der-prev → match f with  
    | Er a b → try  
      let seq-prev = {hyp = a :: b :: (extrait f seq.hyp); concl = seq.concl} in  
      est-valide der-prev seq-prev  
      with Not_found → false  
    | _ → false  
  | Er-d f der1 der2 → match f with  
    | Er a b → try  
      let seq1 = {hyp = seq.hyp; concl = a :: (extrait f seq.concl)} in  
      let seq2 = {hyp = seq.hyp; concl = b :: (extrait f seq.concl)} in  
      (est-valide der1 seq1) && (est-valide der2 seq2)  
      with Not_found → false | _ → false
```


Examen professionnel pour l'avancement au grade de :

Cadre réservé aux candidats d'examens et du concours général

Examen : Série / Spécialité :

Epreuve - Matière : 103-9525 Session : 2024

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuillet officiel, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Remplir soigneusement le cadre relatif au concours OU à l'examen qui vous concerne.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuillet officiel.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) sur le nombre total de pages que comporte la copie (y compris les pages vierges).
- Placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre de numérotation des pages.

On parcourt l'arbre de dérivation via des appels récursifs, à chaque appel on fait des instructions en $O(m)$.
La complexité est donc bien en $O(mn)$

Question 20

Exception Echec ;;

let rec prouve (seq : 'a seqent) ... : 'a dérivation =

^{key}
 let a = List.find seq.hyp (fun f → not (est_atomique f)) in
 match a with
 | Non b → let seq-prev = {hyp = extrait a seq.hyp; concl = b;; seq.concl} in
 Non-g a (prouve seq-prev)
 | Et b c → let seq-prev = {hyp = b;; c;; (extrait a seq.hyp); concl = seq.concl} in
 Et-g a (prouve seq-prev)
 with Not_found → key
 let a = List.find seq.concl (fun f → not (est_atomique f)) in
 match a with
 | Non b → let seq-prev = {hyp = b;; seq.hyp; concl = extrait a seq.concl} in
 Non-d a (prouve seq-prev)

NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

| Et bc →

let seq1 = {hyp = seq.hyp; concl = b;; (extrait a seq.concl)} in

let seq2 = {hyp = seq.hyp, concl = c;; (extrait a seq.concl)} in

Et d a (prouve seq1) (prouve seq2)

with Not-found →

if list.mem Faux seq.hyp then Faux_g else (
 match element-commun seq.hyp seq.concl with
 | Some x → Axiome x
 | None → raise Edec)

Question 21

Concours section : AGRÉGATION EXTERNE INFORMATIQUE

Epreuve matière : Fondements de l'informatique

N° Anonymat : N240NAT1030219

Nombre de pages : 28

17.42 / 20

Examen professionnel pour l'avancement au grade de :

Cadre réservé aux candidats d'examens et du concours général

Examen : Série / Spécialité :

Epreuve - Matière : 103-9425 Session : 2024

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuillet officiel, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Remplir soigneusement le cadre relatif au concours OU à l'examen qui vous concerne.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuillet officiel.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) sur le nombre total de pages que comporte la copie (y compris les pages vierges).
- Placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre de numérotation des pages.

Logique III - Passage à la logique du premier ordre

Question 29

$$\begin{array}{l} \vdash \forall y (R(y) \rightarrow R(t)), \forall z, (R(z) \rightarrow R(t)) \\ \vdash \forall y (R(y) \rightarrow R(t)) \\ \vdash \exists x \forall y (R(y) \rightarrow R(x)) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overline{R(b), R(y) \vdash R(t), R(y)}^{ax} \\ \overline{R(y) \vdash R(t), R(b) \rightarrow R(y)} \rightarrow d \\ \overline{R(y) \vdash R(t), \forall b (R(b) \rightarrow R(y))} \forall d \\ \overline{R(y) \vdash R(t), \exists a, \forall b (R(b) \rightarrow R(a))} \exists d \\ \vdash R(y) \rightarrow R(t), \exists a, \forall b (R(b) \rightarrow R(a)) \rightarrow d \\ \vdash \forall y (R(y) \rightarrow R(t)), \exists a, \forall b (R(b) \rightarrow R(a)) \forall d \\ \vdash \exists x \forall y (R(y) \rightarrow R(x)), \exists a, \forall b (R(b) \rightarrow R(a)) \exists d \\ \vdash \exists x \forall y (R(y) \rightarrow R(x)) \text{ concl} \end{array}$$

21 / 28

Question 25

Si on s'interdit contr_d , la seule règle utilisable directement est $\exists d$ qui donne le séquent $\vdash \forall y (R(y) \rightarrow R(t))$

Or cette formule n'est pas une tautologie.

On peut pour cela considérer un modèle avec deux éléments a et b avec $\llbracket R(a) \rrbracket = V$ et $\llbracket R(b) \rrbracket = F$.

Ce séquent ne peut alors pas être dérivé.

Question 26

26.a) on pose $\sigma = [y := a, x := f(y, z)]$
on a alors

$$\vdash [\sigma] = f(f(y, z), a) = u$$

Donc \vdash et u sont unifiables

~~Question 27~~

26.b) Une substitution solution de ce problème devrait vérifier $\sigma(y) = a$,

26.b) Il n'y a pas de réponse à ce problème car il est impossible d'unifier $f(z, y)$ avec $f(f(y, z), a)$ car il faudrait substituer z par $f(y, z)$

Question 27

a) On a $L_0 = [x \stackrel{?}{=} f(y, z), f(z, y) \stackrel{?}{=} f(f(y, z), a)] \quad \sigma_0 = \text{id}$
 $L_1 = [x \stackrel{?}{=} f(y, z), y \stackrel{?}{=} a, f(z, y) \stackrel{?}{=} f(f(y, z), a)] \quad \sigma_1 = \text{id}$
 $L_2 = [y \stackrel{?}{=} a, f(z, y) \stackrel{?}{=} f(f(y, z), a)] \quad \sigma_2 = [x := f(y, z)]$
 $L_3 = [f(z, a) \stackrel{?}{=} f(f(y, z), a)] \quad \sigma_3 = (y := a) \circ (x := f(y, z))$
 $L_4 = [z \stackrel{?}{=} f(y, z), a := a] \quad \sigma_4 = \sigma_3$

l'algorithme échoue ensuite

b) $L_0 = [S(f(x, S(y))) \stackrel{?}{=} S(f(S(t), z))] \quad \sigma_0 = \text{id}$
 $L_1 = [f(x, S(y)) \stackrel{?}{=} f(S(t), z)] \quad \sigma_1 = \text{id}$
 $L_2 = [x \stackrel{?}{=} S(t), S(y) \stackrel{?}{=} z] \quad \sigma_2 = \text{id}$
 $L_3 = [S(y) \stackrel{?}{=} z] \quad \sigma_3 = (x := S(t))$
 $L_4 = [] \quad \sigma_4 = (z := S(y)) \circ (x := S(t))$

σ_4 est bien solution du problème

Question 28

a) At rec est-variable $(x: 'a) (t: ('a, 'b) \text{terme})$: $\text{bool} = \text{match } t \text{ with}$
| Var $x \rightarrow \text{true}$
| Var $- \rightarrow \text{false}$
| App $f \ l \rightarrow \text{List.exists } l \text{ (est-variable } x)$

```

b) let rec substitute (x:'a) (u:('a,'b)term) (t:('a,'b)term):('a,'b)term =
  match t with
  | Var x → u
  | Var _ → t
  | App f l → App f (List.map l (substitute x u))

```

Question 29

```

let unify ('ins:('a,'b)instance):('a,'b)subst =
  let sigma = ref [] in

```

```

  let rec unify-buff ins = match ins with

```

```

    | [] → !sigma

```

```

    | (u,t)::q → match u with

```

```

      | App f lu → match t with

```

```

        | App g lt → if f = g then begin

```

```

          let new-ins = ref [] in

```

```

          let rec add-in l1 l2 = match (l1,l2) with

```

```

            | [],[] → ()

```

```

            | (e1,q1),(e2,q2) → new-ins := (e1,e2)::!new-ins;
                                add-in q1 q2;

```

```

          in add-in lu lt;

```

```

          unify-buff !new-ins @ q;

```

```

        end else raise Echeck

```

```

      | u → unify-buff (t,u)::q;

```

```

    | Var x → match t with

```

```

      | Var y when y = x → unify-buff q;

```

```

      | _ → if not (is_variable x t) then raise Echeck
            else begin

```

```

                sigma := (x,t)::!sigma;

```

```

                unify-buff (List.map ins (substitute x t));

```

```

  in

```

```

  unify-buff ins;;

```


Examen professionnel pour l'avancement au grade de :

Cadre réservé aux candidats d'examens et du concours général

Examen : Série / Spécialité :

Epreuve - Matière : 103-9925 Session : 2029

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuillet officiel, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Remplir soigneusement le cadre relatif au concours OU à l'examen qui vous concerne.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuillet officiel.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) sur le nombre total de pages que comporte la copie (y compris les pages vierges).
- Placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre de numérotation des pages.

Question 30

On définit la raille d'instance par :

$$\text{Si } x \in V \quad |x| = 1 \quad \text{et} \quad |f(x_1, \dots, x_m)| = 1 + \sum_{i=1}^m |x_i|$$

On définit alors la raille d'une instance de Univ par

$$| [x_i = a_i, i \in [1, n]] | = \sum_{i=1}^n |x_i| + |a_i|$$

et la longueur d'une instance par $l([x_i = a_i, i \in [1, n]])$ comme étant le nombre de variables qui apparaissent dans les x_i, a_i (distinctes)On montre alors que le couple $(l(L_n), |L_n|)$ décroît strictement à chaque étape pour l'ordre lexicographique.Notons déjà que $l(L_n)$ ne croît jamais

- Si $L_n = []$ alors l'algorithme termine
- Si $L_n = \{f(x_1, \dots, x_p) = g(a_1, \dots, a_q)\} \cup L'$ soit l'algorithme termine

Soit $f = g$, et $L_{n+1} = [x_1 = a_1, \dots, x_p = a_p] \cup L'$ On a donc $l(L_{n+1}) \geq l(L_n)$ mais on a $|L_{n+1}| = |L_n| - 2$ donc cela vérifie bien la propriété voulue.

- Si $L_n = (x \stackrel{?}{=} z) :: L'$ alors $L_{n+1} = L'$, donc les deux valeurs diminuent
- Si $L_n = (x \stackrel{?}{=} t) :: L'$ avec, soit l'algorithme termine, soit $L_{n+1} = L'[x := t]$ auquel cas x n'apparaît plus dans L_{n+1} , et donc $l(L_n)$ a diminué, et donc $(l(L_n), |L_n|)$ a diminué.

Finalement, $(l(L_n), |L_n|)$ décroît strictement à chaque étape.

Or $(\mathbb{N}^2, <)$ est bien fondé, donc l'algorithme termine.

Question 31

On note σ_n la substitution produite par l'algorithme sur $[t_n \stackrel{?}{=} u_n]$

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en montrant que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$t_n[\sigma_n] = u_n[\sigma_n] \text{ et } t_{n+1}[\sigma_{n+1}] = f(t_n, t_n)[\sigma_n] = f(t_n[\sigma_n], t_n[\sigma_n])$$

- Si $n = 0$, alors $L = [t_0 \stackrel{?}{=} u_0] = [x_0 \stackrel{?}{=} x_0]$ produit une substitution vide et donc de taille nulle. On a bien $t_0 = u_0$.

$$\text{• Soit } n \in \mathbb{N}^*, \text{ alors } L = [t_{n+1} \stackrel{?}{=} u_{n+1}] = [f(t_n, x_n) \stackrel{?}{=} f(x_n, u_n)]$$

l'algorithme cherche alors à infier $[t_n \stackrel{?}{=} x_n, x_n \stackrel{?}{=} u_n]$

il infie en substituant x_n par t_n , ce qui donne

$[t_n \stackrel{?}{=} u_n]$ puis on en revient au cas d'hérédité.

$$\text{On a donc } t_n[\sigma_{n+1}] = t_n[\sigma_n] \text{ et donc } t_{n+1}[\sigma_{n+1}] = u_n[\sigma_{n+1}]$$

$$u_n[\sigma_{n+1}] = u_n[\sigma_n]$$

$$\text{Or } t_{n+1}[\sigma_{n+1}] = f(t_n, x_n)[\sigma_{n+1}] = f(t_n, t_n)[\sigma_{n+1}]$$

$$= f(t_n, t_n)[\sigma_n]$$

On déduit finalement de l'équation $T_{n+1}[\sigma_{n+1}] = f(T_n[\sigma_n], T_n[\sigma_n])$ par récurrence immédiate que

$T_n[\sigma_n]$ a pour taille 2^{n+1} exactement et donc que $|T_n[\sigma_n]| = \Theta(2^n)$

Corollaire 32

Comme la taille de T_n est linéaire en n , (cela se démontre facilement par récurrence à partir de $T_{n+1} = f(T_n, x_n)$)

et que la substitution renvoyée contient $(x_{n+1} := T_{n+1}[\sigma_{n+1}])$ où $T_{n+1}[\sigma_{n+1}]$ est de taille exponentielle. Il s'agit donc d'une instance pour laquelle l'algorithme d'unification est exponentiel en temps en la taille de son entrée.

Corollaire 32

On montre cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

- Pour $n=0$, on a $\sigma_0 = \text{id}$ et $L_0 = L$
Pour tout σ , σ unifie L si et seulement si $\sigma = \sigma \circ \text{id} = \sigma \circ \sigma_0$ unifie L .
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose cette propriété vérifiée aux rangs précédents. (on inclut)
Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$

① Si $L_n = []$

alors on a (indication) que σ unifie L si et seulement si il existe σ' unifiant $[]$ tel que $\sigma = \sigma' \circ \sigma_n$
l'algorithme termine

② Si $L_n = (f(t_1, \dots, t_p) = g(u_1, \dots, u_q)) :: L'$ et $f = g$

Pour tout σ , σ unifie L si et seulement si il existe σ' unifiant L_n tel que $\sigma = \sigma' \circ \sigma_n$

comme σ' unifie L_n , on a $f(t_1, \dots, t_p)[\sigma'_n] = g(u_1, \dots, u_q)[\sigma']$
et donc $\forall i, t_i[\sigma'] = u_i[\sigma']$

donc σ' unifie L_{n+1} , et comme $\sigma_{n+1} = \sigma_n$, on a $\sigma = \sigma' \circ \sigma_{n+1}$
avec σ' unifiant L_{n+1}

③ le cas $(x \stackrel{?}{=} x)$ est similaire, plus simple

④ cas $(x \stackrel{?}{=} t) : L'$ si $x \notin FV(t)$

Comme σ unifie L_m , on a $x[\sigma'] = t$ et donc

Question 23 On applique le résultat de Q32 lorsque $L_m = \{ \}$

On a

σ unifie L si et seulement si $\exists \sigma'$ unifiant $\{ \}$ tel que $\sigma = \sigma' \circ \sigma_m$

Or toutes les substitutions σ' vérifient cela.

Donc les unificateurs de L sont des extensions de σ_m
i.e σ_m est le plus petit unificateur de L .